

Formes modérément ramifiées de polydisques fermés et de dentelles

Marc CHAPUIS

31 mars 2017

Résumé

Soit k un corps ultramétrique complet, L une extension galoisienne finie modérément ramifiée de k et X un espace k -analytique. Nous montrons que X est isomorphe à un k -polydisque fermé (resp. une k -dentelle) si et seulement si X_L est isomorphe à un L -polydisque fermé (resp. une L -dentelle) sur lequel l'action de $\text{Gal}(L/k)$ est raisonnable.

Abstract

Let k be a complete non-Archimedean field, L a finite tamely ramified galoisian extension of k and X a k -analytic space. We show that X is isomorphic to a closed k -polydisc (resp. a k -lace) if and only if X_L is isomorphic to a closed L -polydisc (resp. a L -lace) on which the action of $\text{Gal}(L/k)$ is reasonable.

Table des matières

1	Algèbre linéaire homogène et Hilbert 90	3
1.1	Espaces vectoriels homogènes	3
1.2	Matrices homogènes	5
1.3	Variantes de deux résultats classiques	6
1.4	Hilbert 90 gradués	8
2	Formes de polydisques fermés	9
2.1	Deux lemmes d'extension des scalaires	11
2.2	Résultat	12
3	Formes de dentelles	14
3.1	Monôme strictement dominant et système de fonctions coordonnées	15
3.2	Résultat	17
3.3	Exemple de forme non triviale de couronne	19

Introduction

Soient k un corps ultramétrique complet, X un espace k -analytique – que nous entendons ici au sens de Berkovich [Ber90; Ber93] – et L une extension galoisienne finie modérément ramifiée de k . Nous montrons les deux résultats suivants (les termes non standards seront clarifiés progressivement) :

(thm. 2.12) X_L est un L -polydisque fermé de polyrayon $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$ sur lequel l'action de $\text{Gal}(L/k)$ est résiduellement affine si et seulement si X est un k -polydisque fermé de polyrayon $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$ avec, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$|L^\times| r_i = |L^\times| s_i.$$

(thm. 3.18) X_L est une L -dentelle de type $U \subset (\mathbb{R}_+^\times)^n$, telle que l'action de $\text{Gal}(L/k)$ sur X_L est triviale sur le réseau si et seulement si X est une k -dentelle de type V et il existe $\mathbf{s} \in |L^\times|^n$ tel que

$$V = \{(s_1 r_1, \dots, s_n r_n), \mathbf{r} \in U\}.$$

Le premier est l'analogue pour les *polydisques fermés* du théorème d'Antoine Ducros pour les *polydisques ouverts* [Duc12b, thm. 3.5], déjà établi pour les *disques fermés* par Tobias Schmidt, [Sch15, thm. 2.22]. Le second étend ce type de résultats à une classe d'espaces incluant les *polycouronnes* que nous proposons d'appeler *dentelles*.

Nous entendons par une k -dentelle de type U un espace k -analytique isomorphe à une partie de $\mathbb{G}_m^{n,\text{an}}$ définie par $(|T_1|, \dots, |T_n|) \in U$ où U est une partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ non vide et connexe c'est-à-dire obtenue par recollement de \mathbb{Z} -polytopes de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ que l'on définit au moyen de formes affines dont la partie linéaire est à coefficients entiers et dont le terme constant appartient à \mathbb{R}_+^\times (on voit ici $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ comme un \mathbb{R} -espace vectoriel). Nous donnons les définitions précises section 3. Ces parties \mathbb{Z} -linéaires par morceaux sont un cas particulier des c -espaces linéaires par morceaux introduits par Berkovich dans [Ber04]; le lecteur intéressé par de telles questions pourra aussi consulter [Duc12a]. Notons entre autre que tous les produits d'intervalles sont des parties \mathbb{Z} -linéaires par morceaux (avec pour conséquence que toutes les k -polycouronnes sont des k -dentelles) et que tous les ouverts (connexes, non vides) de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ sont des parties \mathbb{Z} -linéaires par morceaux (connexes, non vides) de. En dimension un, les k -dentelles sont exactement les k -couronnes : que nous comprenons comme les espaces k -analytiques isomorphes à une partie de $\mathbb{G}_{m,k}^{1,\text{an}}$ définie par $|T| \in I$ où I est un intervalle quelconque de \mathbb{R}_+^\times .¹

Nous utilisons de manière fondamentale la théorie de réduction graduée introduite par Michael Temkin dans [Tem04]. Nous renvoyons aux deux premières sections de [Duc12b] pour une introduction détaillée au formalisme de l'algèbre commutative graduée et une reformulation de la théorie de ramification modérée que nous utiliserons.

En dimension un, un avatar gradué du théorème 90 de Hilbert a été établi et utilisé dans sa preuve pour les disques fermés par Tobias Schmidt, [Sch15, Proposition 2.11]. Notre première section continue ce travail de traduction en termes gradués des outils classiques en en donnant un énoncé en dimension quelconque : proposition 1.18.

Notre deuxième section traite des polydisques fermés. Nous suivons la stratégie de [Duc12b] dont, comme Tobias Schmidt l'avait fait, nous remplaçons des arguments d'algèbre commutative locale par des calculs explicites permis par notre variante graduée du théorème 90 de Hilbert. Or nous ne pouvons le faire que quand l'action de Galois est résiduellement affine, expliquons ceci.

Nous partons d'un espace k -analytique X qui devient un L -polydisque X_L (de dimension n) auquel nous associons l'algèbre résiduelle graduée pour la norme spectrale de son algèbre des fonctions. Cette algèbre résiduelle est isomorphe à une algèbre polynomiale (graduée) $\tilde{L}[\tau_1, \dots, \tau_n]$

1. Un mot sur le choix de *dentelle* (eng. *lace*), les autres candidats considérés posent différents problèmes, par exemple : on a remarqué que les dentelles sont une classe plus large que les parties définies par U un produit d'intervalles auxquels nous voulons réserver *polycouronne*; *polyèdre* colle bien quand U est un polytope mais n'est pas très satisfaisant quand U est ouvert; l'adjectif *cellulaire* est déjà utilisé en topologie, etc.

On peut parler de *polydentelles* (eng. *polylace*), mais en dimension un les couronnes sont exactement les dentelles, et il semble que le couple couronne/dentelle, plus expressif que dentelle/polydentelle, suffit à indiquer si l'on se restreint à la dimension un ou non : c'est le choix que nous avons fait ici.

et nous disons que l'action de Galois est résiduellement affine si l'action induite sur $\tilde{L}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ est affine (i.e. $g.(\tau_1, \dots, \tau_n) = A_g.(\tau_1, \dots, \tau_n) + (b_{1,g}, \dots, b_{n,g})$). C'est toujours le cas en dimension un mais il n'y a pas de raison, *a priori*, pour que ce soit vrai en dimension supérieure, même si nous ne connaissons pas d'exemple de forme modérément ramifiée de polydisque sur lequel l'action de Galois n'est pas résiduellement affine. Toutefois, si X est un k -polydisque, l'action de Galois sur X_L est toujours résiduellement affine.

La preuve marcherait sans cette hypothèse pour peu que l'action de Galois sur $\tilde{L}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ soit linéarisable. Cette question est liée à des problèmes compliqués de descriptions des automorphismes de l'espace affine (pour un exposé complet [Kra95]) : en dimension deux il sera peut-être possible, au prix d'un patient travail de vérification, d'adapter dans le formalisme de l'algèbre résiduelle graduée le résultat de [Kam75] sur les formes séparables du plan affine. Dès la dimension trois, même dans le cas non gradué, la question semble ouverte.

Dans la **dernière section**, nous traitons des dentelles sur le réseau desquelles Galois agit trivialement : la L -dentelle X_L de type U se rétracte par déformation sur une partie homéomorphe à U , son squelette analytique $S(X_L)^{\text{an}}$, quand U est d'intérieur non vide (en dimension un, un intervalle non réduit à un point), l'action de Galois est triviale sur le réseau si et seulement si elle est triviale sur $S(X_L)^{\text{an}}$ (en dimension un si elle préserve l'orientation de $S(X_L)^{\text{an}}$), et on généralise cette idée quand U est d'intérieur vide.

Notre stratégie de preuve est la même que pour les polydisques à ceci près que celle-là repose sur une caractérisation de coordonnées par leurs réductions graduées pour *la norme spectrale* et que cette approche échoue dès les couronnes (i.e les dentelles de dimension un). Nous résolvons la difficulté en considérant simultanément *plusieurs* algèbres résiduelles.

Notons que Lorenzo Fantini et Daniele Turchetti ont développé dans [FT17] des techniques de descente galoisienne pour les espaces analytiques non archimédiens qui admettent un schéma formel spécial affine comme modèle au-dessus d'un anneau de valuation discrète complet. Avec ces techniques ils démontrent un cas particulier – sur un corps discrètement valué k , en dimension un, pour les couronnes de rayons distincts dans $\sqrt{|k^\times|}$ et des hypothèse plus strictes sur l'extension – de notre résultat sur les dentelles. Leur méthode complètement différente ouvre des pistes intéressantes quand la nôtre semble rester muette : ils obtiennent, par exemple, une description des formes de couronnes après extension quadratique sur lesquelles l'action de Galois permute l'orientation du squelette analytique.

1 Algèbre linéaire homogène et Hilbert 90

Dans tout ce qui suit, on désignera par Γ un groupe abélien divisible, sans torsion et ordonné, toujours noté multiplicativement. On lui adjoint un élément absorbant pour la multiplication, on le note 0 et c'est le plus petit élément.

On désignera par k un corps Γ -gradué.

Remarque 1.1. Avant de pouvoir traduire en termes graduées une preuve classique du théorème 90 de Hilbert (telle qu'exposée par exemple dans [Ber10]) il nous faut donner un sens précis aux espaces vectoriels et matrices que nous manipulons. C'est l'objet des deux premières sous-sections.

1.1 Espaces vectoriels homogènes

Définition 1.2. On appelle *k -espace vectoriel homogène* un ensemble V muni d'une décomposition $V = \coprod_{\rho \in \Gamma} V_\rho$, d'une structure de groupe abélien sur chacun des V_ρ , et d'une famille d'applications bilinéaires :

$$\bullet_{r,\rho} : k_r \times V_\rho \rightarrow V_{r\rho}, (\lambda, v) \mapsto \lambda \bullet_{r,\rho} v$$

telles que $1_1 \bullet_{1,\rho} u = u$ et $(\lambda\mu) \bullet_{rs,\rho} u = \lambda \bullet_{r,\rho s} (\mu \bullet_{s,\rho} u)$ pour tout (λ, μ, u) .

En particulier V_ρ est un k_1 -espace vectoriel.

Remarque 1.3. Nous nous éloignons par cette définition des objets habituels de la réduction graduée au sens de Temkin, en effet un k -espace vectoriel gradué y est muni d'une décomposition en somme directe $V = \bigoplus_{\rho \in \Gamma} V_\rho$ et non en réunion disjointe. Cela a pour conséquence que le corps gradué k , qui a une structure naturelle de k -espace vectoriel gradué, n'est pas un k -espace vectoriel homogène, ce rôle étant tenu par l'ensemble des éléments homogènes de k .

Si nous ne travaillions qu'avec des vecteurs nous nous en tiendrions aux espaces vectoriels gradués en précisant à chaque fois que nous travaillons avec des éléments homogènes, mais les matrices dont nous voulons parler correspondent naturellement aux morphismes d'espaces vectoriels homogènes et l'exposé perdrait nettement en clarté si nous nous refusions cet écart.

En fait, on peut dès le départ définir tous les objets gradués comme réunions disjointes, c'est l'approche d'Antoine Ducros dans [Duc, sec. 2.2] et alors les notions d'espace vectoriel gradué et d'espace vectoriel homogène coïncident. Néanmoins écrire tout notre papier dans ce cadre nous couperait de [Duc12b] et [Sch15].

Définition 1.4. Soit U et V deux k -espaces vectoriels homogènes, et $f : U \rightarrow V$ une application (dont on note f_ρ la restriction à U_ρ), on dit que f est k -linéaire homogène s'il existe $R_f \in \Gamma$ (que l'on appellera *degré* de f) tel que pour tout $\rho \in \Gamma$:

- $\text{im}(f_\rho) \subset V_{R_f \rho}$;
- pour tout $u, v \in U_\rho$, $f_\rho(u +_\rho v) = f_\rho(u) +_{R_f \rho} f_\rho(v)$;
- et pour tout u dans U_ρ et tout $\lambda \in k_r$, $f_\rho(\lambda \bullet_{r,\rho} u) = \lambda \bullet_{r, R_f \rho} f_\rho(u)$.

En particulier $f_\rho : U_\rho \rightarrow V_{R_f \rho}$ est une application k_1 -linéaire.

Définition 1.5. Soit V un k -espace vectoriel homogène, soit v_1, \dots, v_n une famille de vecteurs de degrés ρ_1, \dots, ρ_n , on dit que la famille v_1, \dots, v_n est *libre* si pour tout $R \in \Gamma$ et toute famille d'éléments $\lambda_i \in k_{R\rho_i^{-1}}$,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0_R$$

équivalent à $\lambda_i = 0_{R\rho_i^{-1}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

On dit que la famille est *génératrice* si pour tout vecteur x de V , dont on note R le degré, il existe une famille d'éléments $\lambda_i \in k_{R\rho_i^{-1}}$ telle que

$$x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

On dit que la famille est une *base* si elle est libre et génératrice.

Remarque 1.6. On peut vérifier que le théorème de la dimension ainsi que le théorème de la base incomplète sont encore vrais, i.e. deux bases quelconques d'un même espace vectoriel homogène ont même cardinal et tout espace vectoriel homogène admet une base ; ceci nous permet de définir la *dimension* d'un k -espace vectoriel homogène comme le cardinal commun à toutes ses bases.

On a alors une notion évidente de produit tensoriel de k -espaces vectoriels homogènes. En effet il nous suffit prendre en compte la graduation dans les constructions usuelles, par exemple : soient U et V deux k -espaces vectoriels homogènes, nous pouvons parler de l'espace vectoriel homogène libre $F(U \times V)$ engendré par $U \times V$ sur k (où le degré d'un couple (u, v) est défini comme le produit des degrés des coordonnées). Et alors les vecteurs du produit tensoriel que nous noterons $U \otimes_{k(1)} V$ sont les classes d'équivalences définis par les relations suivantes sur $F(A \times V)$:

- $\forall r_1, r_2, s \in \Gamma, u_1 \in U_{r_1}, u_2 \in U_{r_2}, v \in V_s, (u_1, v) + (u_2, v) \sim (u_1 + u_2, v)$;
- $\forall r, s_1, s_2 \in \Gamma, u_1 \in U_r, v_1 \in V_{s_1}, v_2 \in V_{s_2}, (u, v_1) + (u, v_2) \sim (u, v_1 + v_2)$;
- $\forall r, s, \rho \in \Gamma, u \in U_r, v \in V_s, \lambda \in k_\rho, \lambda \bullet (u, v) \sim (\lambda \bullet u, v)$;

— $\forall r, s, \rho \in \Gamma, u \in U_r, v \in V_s, \lambda \in k_\rho, \lambda \bullet (u, v) \sim (u, \lambda \bullet v)$.

Les opérations étant induites.

Définition 1.7. Soit U et V deux k -espaces vectoriels homogènes, et $f : U \rightarrow V$ une application k -linéaire homogène, on appellera *noyau* de f l'ensemble, que l'on notera encore $\ker(f)$, défini par

$$\ker(f) = \coprod_{\rho \in \Gamma} \ker(f_\rho).$$

Définition 1.8. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \Gamma^n$, l'ensemble

$$\{(x_1, \dots, x_n) \mid \exists R \in \Gamma, \forall i, x_i \in k_{Rr_i}\},$$

a une structure naturelle de k -espace vectoriel homogène, où le vecteur (x_1, \dots, x_n) est de degré R . On le notera $k_{\mathbf{r}}$.

Remarque 1.9. Le k -espace vectoriel homogène $k_{(1)}$ n'est autre que l'ensemble des éléments homogènes de k muni de la gradation et des opérations induites.

1.2 Matrices homogènes

Définition 1.10. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \Gamma$ et $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \Gamma$, on note :

$$M(k, \mathbf{s}, \mathbf{r}) := \left\{ (a_{ij})_{i,j=1..n} \mid a_{ij} \in k_{s_i r_j^{-1}} \right\}.$$

Cet ensemble, de *matrices homogènes*, est en bijection avec les applications k -linéaires homogènes de $k_{\mathbf{r}}$ dans $k_{\mathbf{s}}$ de degré 1. Pour les opérations évidentes,

- c'est un groupe additif;
- pour tout $\mathbf{s}' = (s'_1, \dots, s'_n) \in \Gamma^n$ la multiplication à droite d'un élément de $M(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ avec un élément de $M(k, \mathbf{r}, \mathbf{s}')$ a un sens et définit un élément de $M(k, \mathbf{s}, \mathbf{s}')$;
- le déterminant de telles matrices a un sens, c'est un élément de k_ρ , où $\rho = \prod_{i=1..n} s_i r_i^{-1}$. Si le déterminant est non nul, la formule usuelle définit une matrice inverse qui appartient à $M(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$. Enfin on note $GL(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ le sous-ensemble des matrices de déterminant non nul.

Remarque 1.11. Insistons un moment sur le fait que $GL(k, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ puisse être vide, en effet, deux k -espaces vectoriels homogènes de même dimension ne sont pas forcément isomorphes. Prenons $\widetilde{Q}_{3(1)}$ et $\widetilde{Q}_{3(2)}$, c'est-à-dire deux fois le même ensemble – les éléments homogènes de \widetilde{Q}_3 – où l'on voit (le vecteur) $\widetilde{1}_1$ comme étant de degré respectivement 1 et $\frac{1}{2}$. La seule application linéaire de degré 1 de $\widetilde{Q}_{3(1)}$ dans $\widetilde{Q}_{3(2)}$ est l'application « nulle de degré 2 » c'est-à-dire donnée par la multiplication par $\widetilde{0}_2$, ou encore, traduit dans les notations que nous venons d'adopter,

$$M(Q_3, (2), (1)) = \{\widetilde{0}_2\} \text{ et } GL(Q_3, (2), (1)) = \emptyset.$$

Fixons une dernière notation.

Définition 1.12. L'ensemble $M(k, \mathbf{r}, \mathbf{r})$ des matrices qui correspondent aux endomorphismes k -linéaires homogènes de $k_{\mathbf{r}}$ (de degré 1) forme un anneau, on le notera

$$M(k, \mathbf{r}),$$

et le sous-ensemble que l'on note de manière transparente $GL(k, \mathbf{r})$ est donc toujours non vide (et forme un groupe multiplicatif).

Remarque 1.13. Ces ensembles ne dépendent pas tant de (r_1, \dots, r_n) que de la droite vectorielle engendrée par (r_1, \dots, r_n) .

En dimension 1, pour tout $r, s \in \Gamma$,

- $M(k, (s), (r)) = k_{sr^{-1}}$ et $GL(k, (s), (r)) = k_{sr^{-1}}^\times$;
- $M(k, (r)) = M(k, (1)) = k_1$ et $GL(k, (r)) = GL(k, (1)) = k_1^\times$.

1.3 Variantes de deux résultats classiques

Proposition 1.14 (Indépendance linéaire des automorphismes de corps commutatifs gradués). Soit k un corps commutatif gradué, soit une famille $(\chi_i)_{i=1\dots n}$ de n automorphismes, deux à deux distincts, de k , soit $\rho \in \Gamma$ et soit $(a_i)_{i=1\dots n}$ une famille d'éléments de k_ρ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- $a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \dots + a_n\chi_n = 0$;
- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $a_i = 0_\rho$.

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\times$. Si $n = 1$, cela revient à montrer qu'un automorphisme χ de k n'est pas nul, or $\chi(1_1) = 1_1 \neq 0_1$. Supposons $n \geq 2$, alors pour tout x, y éléments homogènes de k dont on note r et s les degrés

$$a_1\chi_1(xy) + a_2\chi_2(xy) + \dots + a_n\chi_n(xy) = 0_{\rho s},$$

soit

$$a_1\chi_1(x)\chi_1(y) + a_2\chi_2(x)\chi_2(y) + \dots + a_n\chi_n(x)\chi_n(y) = 0_{\rho s}$$

et donc pour tout x de k_r ,

$$a_1\chi_1(x)\chi_1 + a_2\chi_2(x)\chi_2 + \dots + a_n\chi_n(x)\chi_n = 0_{\rho r}.$$

On a aussi pour tout x de k_r , en multipliant $a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \dots + a_n\chi_n = 0$ par $\chi_1(x)$,

$$a_1\chi_1(x)\chi_1 + a_2\chi_1(x)\chi_2 + \dots + a_n\chi_1(x)\chi_n = 0.$$

Par soustraction :

$$a_2(\chi_1(x) - \chi_2(x))\chi_2 + \dots + a_n(\chi_1(x) - \chi_n(x))\chi_n = 0.$$

Cette somme comporte $n - 1$ termes et comme $\chi_1 \neq \chi_n$ on peut choisir x de telle sorte que $\chi_1(x) \neq \chi_n(x)$. Par hypothèse de récurrence on obtient que $a_n = 0_\rho$, donc que

$$a_1\chi_1 + a_2\chi_2 + \dots + a_{n-1}\chi_{n-1} = 0,$$

et, encore par hypothèse de récurrence, que $a_i = 0_\rho$ pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$. QED

Définition 1.15. Soit L/k une extension galoisienne de groupe de Galois G , et soit U un espace vectoriel homogène sur L avec une action $*$ de G sur U . On note \cdot l'action linéaire standard de G sur L . On dit que G agit par *automorphismes semi-linéaires* sur U si l'on a pour tout $r, s \in \Gamma$, $u, u' \in U_r, \lambda \in L_s$

$$\begin{aligned}\sigma * (u + u') &= \sigma * u + \sigma * u'; \\ \sigma * (\lambda u) &= (\sigma \cdot \lambda)(\sigma * u).\end{aligned}$$

Lemme 1.16. Soit U un espace vectoriel homogène sur L . Si G agit sur U par automorphismes semi-linéaires, alors $U^G := \{u \in U \mid \sigma * u = u \text{ pour tout } \sigma \in G\}$ est un k -espace vectoriel homogène, et l'application :

$$f : U^G \otimes_{k(1)} L_{(1)} \rightarrow U, u \otimes \lambda \mapsto \lambda u$$

est un isomorphisme homogène de degré 1.

Remarque 1.17. Ici $U^G \otimes_{k(1)} L_{(1)}$ désigne le k -espace vectoriel homogène obtenu comme produit vectoriel, cf. [remarque 1.6](#).

Démonstration. Il est clair que U^G est un k -espace vectoriel homogène et que f est L -linéaire homogène de degré 1. Établissons d'abord la surjectivité de f .

Soit u un vecteur de U , soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ une k -base de L et soit $\sigma_1 = id_L, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ les éléments de G . Posons pour $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$u_i = \sum_j \sigma_j * (\lambda_i u).$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sigma_k * u_i = \sum_j (\sigma_k \sigma_j) * (\lambda_i u).$$

Ainsi l'action de σ_k sur $\sum_j \sigma_j * (\lambda_i u)$ ne fait que permuter les termes de la somme, donc $u_i \in U^G$.

Comme $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont des k -automorphismes distincts de L , ils sont linéairement indépendants sur L (**proposition 1.14**). C'est pourquoi, ayant, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, noté r_i le degré de λ_i , la matrice $M = (\sigma_j \cdot \lambda_i)_{i,j}$ appartient à $GL(L, (r_1, \dots, r_n), (1, \dots, 1))$. Puisque G agit par automorphismes semi-linéaires, on a

$$u_i = \sum_j \sigma_j * (\lambda_i u) = \sum_j (\sigma_j \cdot \lambda_i) (\sigma_j * u).$$

Maintenant si l'on écrit $M^{-1} = (m'_{ij})$, de $M^{-1}M = I_n$,

$$\sum_j m'_{1k} (\sigma_k \cdot \lambda_j) = \delta_{1k} \text{ pour tout } k = 1 \dots n.$$

Donc

$$\sum_j m'_{ij} u_j = \sum_j \sum_k m'_{1j} (\sigma_k \cdot \lambda_j) (\sigma_k * u) = \sum_k \delta_{1k} (\sigma_k * u) = \sigma_1 * u = u,$$

la dernière égalité découlant de $\sigma_1 = id_L$. Ainsi

$$u = \sum_j m'_{1j} u_j = f\left(\sum_j u_j \otimes m'_{1j}\right),$$

ce qui prouve la surjectivité de f .

Admettons un instant que l'on ait montré que « toute famille de vecteurs $u_1, \dots, u_l \in U^G$ k -linéairement indépendants est une famille de vecteurs L -linéairement indépendants dans U ». Alors, soit $x \in \ker(f)$ (de degré ρ). On peut écrire :

$$x = u_1 \otimes \mu_1 + \dots + u_n \otimes \mu_n,$$

où les u_1, \dots, u_n sont k -linéairement indépendants (de degré r_i) et les μ_i sont des éléments homogènes de L (où μ_i est de degré ρr_i^{-1}). Par construction, $f(x) = 0_\rho = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n$. Alors on a $\mu_i = 0_{\rho r_i^{-1}}$, et donc $x = 0_\rho$, ce qui prouve l'injectivité de f .

Montrons maintenant ce que nous avons admis. Supposons que l'on ait l vecteurs k -linéairement indépendants $u_1, \dots, u_l \in U^G$ (de degrés r_i) pour lesquels il existe μ_1, \dots, μ_l éléments homogènes de L (μ_i est de degré ρr_i^{-1}) non tous nuls tels que :

$$\mu_1 u_1 + \dots + \mu_l u_l = 0_\rho.$$

On peut supposer que l est minimal, $l > 1$ et $\mu_1 = 1_1$ (alors $\rho = r_1$). Par hypothèse, les μ_i ne sont pas tous dans k , donc on peut aussi supposer que $\mu_2 \notin k$. Soit $\sigma \in G$ tel que $\sigma \cdot \mu_2 \neq \mu_2$, alors

$$\sigma\left(\sum_i \mu_i u_i\right) = \sum_i (\sigma \cdot \mu_i) (\sigma * u_i) = \sum_i (\sigma \cdot \mu_i) u_i = 0_\rho$$

et on obtient $\sum_{i \geq 2} (\sigma \cdot \mu_i - \mu_i) u_i = 0_\rho$, relation non triviale avec moins de termes, contradiction.

QED

1.4 Hilbert 90 gradués

Proposition 1.18 (Hilbert 90 multiplicatif). Soit L/k une extension galoisienne de corps gradués dont on note G le groupe de Galois, et soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \Gamma^n$, alors pour tout

$$\alpha \in Z^1(G, \text{GL}(L, \mathbf{r}))$$

il existe $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \Gamma^n$ et $P \in \text{GL}(L, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ tels que

$$\alpha(\sigma) = (\sigma \cdot P)P^{-1} \text{ pour tout } \sigma \in G.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in Z^1(G, \text{GL}(L, \mathbf{r}))$. On tord l'action naturelle de G sur $L_{\mathbf{r}}$ en une action par automorphismes semi-linéaires :

$$\sigma * u = \frac{1}{\alpha(\sigma)}(\sigma \cdot u) \text{ pour tout } u \in L_{\mathbf{r}}, \sigma \in G.$$

D'après le lemme 1.16 il existe un isomorphisme $f : L_{\mathbf{r}}^G \otimes_{k(1)} L_{(1)} \xrightarrow{\sim} L_{\mathbf{r}}$. En particulier $\dim_k(L_{\mathbf{r}}^G) = \dim_L(L_{\mathbf{r}}^G \otimes_{k(1)} L_{(1)}) = \dim_L(L_{\mathbf{r}}) = n$.

Soit v_1, \dots, v_n une k -base homogène de $L_{\mathbf{r}}^G$, c'est aussi une L -base homogène de $L_{\mathbf{r}}$, et, notant s_i^{-1} le degré de v_i , la j -ème coordonnée de v_i est de degré $s_i^{-1}r_j$. Ainsi la matrice P dont les colonnes sont v_1, \dots, v_n appartient à $\text{GL}(L, \mathbf{r}, \mathbf{s})$.

Alors, pour tout $\sigma \in G$, la matrice $\sigma \cdot P$ est la matrice dont les colonnes sont $\sigma \cdot v_1, \dots, \sigma \cdot v_n$. Mais $v_1, \dots, v_n \in L_{\mathbf{r}}^G$, et donc

$$v_i = \sigma * v_i = \frac{1}{\alpha(\sigma)}(\sigma \cdot v_i) \text{ pour tout } i = 1 \dots n.$$

Ou encore en termes de matrices :

$$P = \frac{1}{\alpha(\sigma)}(\sigma \cdot P) \text{ pour tout } \sigma \in G. \quad \text{QED}$$

Remarque 1.19. Cette version se ramène en dimension 1 à l'énoncé ci-dessous, donnant une autre preuve de [Sch15, Proposition 2.11].

Corollaire 1.20. Soit L/k une extension galoisienne de corps gradués dont on note G le groupe de Galois, alors pour tout $\alpha \in Z^1(G, L_1^\times)$ il existe $s \in \Gamma$ et $\lambda \in L_s^\times$ tels que

$$\alpha(\sigma) = \frac{\sigma \cdot \lambda}{\lambda} \text{ pour tout } \sigma \in G.$$

En particulier, ayant noté $\mathfrak{D}(k)$ (resp. $\mathfrak{D}(L)$) le groupe des degrés non nuls de k (resp. L),

$$H^1(G, L_1^\times) = \mathfrak{D}(L) / \mathfrak{D}(k).$$

Démonstration. Il suffit de rappeler que pour tout r et s dans Γ , sont isomorphes L_1^\times et $\text{GL}(L, (r))$, ainsi que L_s^\times et $\text{GL}(L, (s), (1))$. QED

Proposition 1.21 (Hilbert 90 additif gradué). Soit k un corps gradué, K une extension galoisienne de k , r un élément de Γ , et $G = \text{Gal}(K/k)$ le groupe de Galois de K/k , on a alors

$$H^1(G, K_r) = 0.$$

Démonstration. (D'après Antoine Ducros.) On se ramène immédiatement au cas où K est une extension finie de k . On commence par remarquer que comme K est finie galoisienne sur k , il existe un élément λ de trace 1 dans K_1^\times . Il y a pour ce faire deux possibilités : décaler la démonstration de la non dégénérescence de la trace dans le contexte gradué, en se ramenant par tensorisation avec une extension convenable au cas d'un produit fini d'extensions de k ; ou bien utiliser le résultat connu pour K_1 , et le fait que le noyau de la surjection $G \rightarrow \text{Gal}(K_1/k_1)$ est d'ordre inversible dans k .

La multiplication par λ est alors un endomorphisme de K_r de trace égale à l'identité, et l'existence d'un tel endomorphisme permet de conclure (Cartan-Eilenberg-Serre utilise cette méthode dans Corps locaux). QED

2 Formes de polydisques fermés

À partir de maintenant lorsque nous parlerons d'espaces vectoriels ce seront toujours des espaces vectoriels gradués au sens de Temkin.

On note k un corps ultramétrique complet.

On note T_1, \dots, T_n des coordonnées sur $\mathbb{A}_k^{n,\text{an}}$.

Définition 2.1. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$, nous noterons $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ le domaine analytique de $\mathbb{A}_k^{n,\text{an}}$ défini par les conditions $|T_i| \leq r_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, que nous appellerons *k-polydisque fermé centré en l'origine de polyrayon \mathbf{r}* .

Nous dirons qu'un espace k -analytique X est un *k-polydisque fermé de type \mathbf{r}* s'il est isomorphe à $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$.

Nous dirons qu'une famille (f_1, \dots, f_n) de fonctions sur un k -polydisque fermé X est un *système de coordonnées* si les f_i induisent un isomorphisme entre X et un k -polydisque fermé centré en l'origine.

Définition 2.2. Nous noterons $\mathcal{A}_{\mathbf{r}}$ l'algèbre des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$, que nous munissons de la norme spectrale $\|\cdot\|_\infty$, et $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{r}}$ sa réduction graduée pour cette norme.

Lemme 2.3. Il existe un isomorphisme de \widetilde{k} -algèbres graduées entre $\widetilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{r}}$ et l'anneau gradué

$$\widetilde{k}[\tau_1, \dots, \tau_n]$$

modulo l'identification de \widetilde{T} avec τ_i .

Rappelons que l'anneau sous-jacent à cet anneau gradué est $\widetilde{k}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ au sens usuel, et que le groupe de ses éléments homogènes de degré s est formé, pour s fixé, des polynômes de la forme $\sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I \tau^I$ avec a_I homogène de degré $s\mathbf{r}^{-I}$ pour tout I , i.e. τ_i est de degré r_i .

Démonstration. Corollaire de [Tem04, Proposition 3.1 (i)]. QED

Proposition 2.4. Soit (f_1, \dots, f_n) une famille de fonctions analytiques sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ telle que

$$(\widetilde{f}_i) = A(\tau_j)_{j=1..n} + B,$$

où, notant $s_i = \|f_i\|_\infty$, $A \in \text{GL}(\widetilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ et $B \in \widetilde{k}_{\mathbf{s}}$.

Alors (f_i) est un système de coordonnées induisant un isomorphisme entre $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ et $\mathbb{D}_{\mathbf{s}}$.

Remarque 2.5. Rappelons que $A \in \text{GL}(\widetilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ signifie simplement que A est de la forme $(a_{i,j})_{i,j=1..n}$ avec $a_{i,j} \in k_{r_j^{-1}s_i}$ et $\det(A) \in k_R^\times$ où $R = \prod_{i=1..n} (r_i^{-1}s_i)$, et que $B \in \widetilde{k}_{\mathbf{s}}$ signifie que B est de la forme $(b_i)_{i=1..n}$ avec $b_i \in k_{s_i}$.

Démonstration. Notons $\varphi : X \rightarrow Y$ le morphisme induit par les f_i . De même que dans [Duc12b, prop. 3.4], quitte à composer φ avec la translation par une pré-image dans k^n de $-B$, on peut supposer que

$$(\tilde{f}_i)_{i=1..n} = A.(\tau_i)_{i=1..n},$$

et il existe pour tout i , g_i dans $k[[\mathbf{T}]]$, telle que $g_i(f_i) = T_i$. Les arguments donnés dans sa preuve par Antoine Ducros nous permettent de garantir que les g_i sont de norme spectrale majorée par r_i et qu'elles convergent en particulier sur le polydisque *ouvert*. En fait, les égalités $g_i(f_i) = T_i$ impliquent $\tilde{g}_i(\tilde{f}_i) = \tau_i$ pour tout i , c'est-à-dire que

$$(\tilde{g}_i)_{i=1..n} = A^{-1}(\tau_i)_{i=1..n}.$$

Ainsi si l'on écrit $g_i = \sum b_{i,I} \mathbf{T}^I$, les monômes dont le multi-degré est supérieur à 2 sont de norme strictement inférieure à celle de g_i , elle-même majorée par r_i , donc les monômes de multi-degré supérieur à 2 sont de norme strictement majorée par r_i . Donc chacune des g_i converge sur Y et le n -uplet (g_1, \dots, g_n) définit ainsi un morphisme $\psi : Y \rightarrow X$ qui vérifie $\psi \circ \varphi = \text{Id}_X$ et $\varphi \circ \psi = \text{Id}_Y$. Ainsi φ est un isomorphisme. QED

Corollaire 2.6. Soit $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$ et $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$, deux k -polydisques fermés respectivement de type \mathbf{r} et \mathbf{s} sont isomorphes si et seulement si, quitte à réordonner les s_i ,

$$s_i r_i^{-1} \in |k^\times|$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Démonstration. L'implication découle de la proposition ci-dessus, l'ensemble

$$\text{GL}(\tilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r})$$

est vide s'il n'est pas vrai que

$$\forall i \exists j, s_i r_j^{-1} \in |k^\times| \text{ et } \forall j \exists i, s_i r_j^{-1} \in |k^\times|.$$

Considérons en effet une matrice $A \in \text{M}(\tilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r})$. Le j -ème coefficient de la i -ème ligne est un élément de $k_{s_i r_j^{-1}}$ or $r_i^{-1} s_j \notin |k^\times|$ implique $k_{s_i r_j^{-1}} = \{0\}$, ainsi si pour un i il n'existe pas j tel que $s_i r_j^{-1} \in |k^\times|$ la i -ème ligne ne comporte que des zéros et la matrice A est de déterminant nul. De même si pour un j il n'existe pas i tel que $s_i r_j^{-1} \in |k^\times|$ la j -ème colonne ne comporte que des zéros.

Réciproquement, quitte à réordonner les s_i , il existe, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_i \in k^\times$ tel que $|\lambda_i| r_i = s_i$, donc si l'on prend un système de coordonnées (T_1, \dots, T_n) induisant un automorphisme de $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$, d'après la proposition ci-dessus, $(\lambda_1 T_1, \dots, \lambda_n T_n)$ est encore un système de coordonnées sur $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ induisant un isomorphisme vers $\mathbb{D}_{(|\lambda_i| r_i)}$, c'est-à-dire $\mathbb{D}_{\mathbf{s}}$. QED

Définition 2.7. Nous dirons que l'action d'un groupe G sur un polydisque fermé $\mathbb{D}_{\mathbf{r}}$ est *résiduellement affine* si l'action induite sur le plan $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{r}} \simeq \tilde{k}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ est affine. C'est-à-dire, pour tout $g \in G$:

$$g.(\tau_i) = A(\tau_i) + B,$$

où, notant s_i le degré de $g.\tau_i$, $A \in \text{M}(\tilde{k}, \mathbf{s}, \mathbf{r})$ et $B \in \tilde{k}_{\mathbf{s}}$.

Remarque 2.8. La [proposition 2.4](#) joue le même rôle dans notre preuve que [[Duc12b](#), Proposition 3.4] et [[Sch15](#), Proposition 2.18] dans leurs papiers. Elle implique en particulier qu'un groupe dont l'action sur \mathbb{D}_r induit une action par automorphismes *affines* préservant le degré sur $\widetilde{\mathcal{A}}_r$ agit par automorphismes préservant la norme spectrale sur \mathbb{D}_r .

Remarquons qu'une action de groupe par automorphismes préservant la norme spectrale sur \mathbb{D}_r est résiduellement affine quand pour tout i ,

$$|k^\times| r_i \cap |k^\times| \mathbf{r}^I \neq \emptyset$$

implique que toutes les coordonnées de I hormis la i -ème soient nulles. Ou, de manière équivalente dès la dimension deux, quand la famille (r_i) est \mathbb{Z} -linéairement indépendante dans \mathbb{R}_+^\times modulo $|k^\times|$.

Cela découle de la forme de $\widetilde{\mathcal{A}}_r$, en effet c'est un fait classique en dimension un (l'ordre fini des éléments de $\text{Gal}(\widetilde{L}/\widetilde{k})$ impliquant que le degré du polynôme $g.\widetilde{T}$ est 1) et, en dimension supérieure, si les r_i sont \mathbb{Z} -linéairement indépendants dans \mathbb{R}_+^\times modulo $|k^\times|$, τ_i et τ_j ne peuvent apparaître dans la même somme homogène lorsque $i \neq j$, donc $\widetilde{\mathcal{A}}_r = \widetilde{\mathcal{A}}_{(r_1)} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{\mathcal{A}}_{(r_2)} \otimes_{\widetilde{k}} \cdots \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{\mathcal{A}}_{(r_n)}$. Un automorphisme préservant la norme spectrale fixera alors $\widetilde{\mathcal{A}}_{(r_i)}$ pour tout i .

Il est intéressant de noter que quand les r_i sont \mathbb{Z} -linéairement indépendants dans \mathbb{R}_+^\times modulo $|k^\times|$ et qu'aucun des r_i n'est de torsion modulo $|k^\times|$, l'algèbre $\widetilde{\mathcal{A}}_r$ est locale et qu'à cette proposition près la preuve d'Antoine Ducros dans [[Duc12b](#)] marche directement. Il est amusant qu'un polydisque fermé de polyrayon suffisamment « éloigné » de $|k^\times|^n$ (en dimension un c'est un disque qui a pour bord un point de type 3) semble ainsi se comporter comme un polydisque ouvert.

En toute généralité le même argument ne peut marcher dès la dimension deux : prenons le bidisque de birayon $(1, 1)$ sur un corps ultramétrique complet quelconque. La famille $(T_1, T_2 + T_1^2)$ induit un automorphisme isométrique du bidisque – dont l'inverse est donné par $(T_1, T_2 - T_1^2)$ – et a pour réduction $(\tau_1, \tau_2 + \tau_1^2)$.

2.1 Deux lemmes d'extension des scalaires

Il nous sera pratique d'avoir présenté sous la forme des deux lemmes ci-dessous des résultats établis au début de la preuve de [[Duc12b](#), Théorème 3.5]. Nous en redonnons les démonstrations.

Lemme 2.9. *Soit k un corps ultramétrique complet et X un espace k -analytique. Soit L une extension finie de k . Notons \mathcal{A} l'algèbre des fonctions analytiques sur X et \mathcal{B} l'algèbre des fonctions analytiques sur X_L . La flèche naturelle*

$$\mathcal{A} \otimes_k L \rightarrow \mathcal{B}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Supposons L une extension finie de k . Choisissons une base (l_1, \dots, l_n) de L sur k . Si V est un domaine affinoïde de X d'algèbre \mathcal{A}_V alors V_L est un domaine affinoïde de X_L d'algèbre $\mathcal{A}_V \otimes_k L \simeq \bigoplus \mathcal{A}_V.l_i$; il s'ensuit que la flèche naturelle

$$\mathcal{A} \otimes_k L = \bigoplus \mathcal{A}.l_i \rightarrow \mathcal{B}$$

est un isomorphisme. QED

Lemme 2.10. *Soit k un corps ultramétrique complet et X un espace k -analytique compact. Soit L une extension modérément ramifiée de k . Notons \mathcal{A} l'algèbre des fonctions analytiques sur X et \mathcal{B} l'algèbre des*

fonctions analytiques sur X_L , que nous munissons de la norme spectrale, et $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ leurs réductions pour cette norme. Le morphisme canonique

$$\tilde{\mathcal{A}} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Choisissons un d -uplet (l_1, \dots, l_d) d'éléments de L^\times tel que $(\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_d)$ soit une base de \tilde{L} sur \tilde{k} . Soit \mathbb{K} une extension ultramétrique complète quelconque de k . Comme L est une extension modérément ramifiée de k , la famille $(\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_n)$ est d'après [Duc12b, §2.21] encore une base de $(\mathbb{K} \otimes_k L)$ sur \tilde{k} . Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, [Duc12b, Lemme 2.3] assure alors que

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{K} \otimes_k L} \lambda_i l_i \right\| = \max |\lambda_i| \cdot |l_i|.$$

Donc, par la définition de la norme spectrale d'une fonction analytique, on a pour tout n -uplet (f_1, \dots, f_n) d'éléments de \mathcal{A} , l'égalité

$$\left\| \sum_{i \in \mathcal{B}} f_i \cdot l_i \right\|_\infty = \max \|f_i\|_\infty |l_i|.$$

On en déduit l'égalité des sommandes $\tilde{\mathcal{B}}_\rho = \oplus_i \tilde{L}_{\frac{\rho}{|l_i|}} \tilde{l}_i$ et donc que le morphisme canonique $\tilde{\mathcal{A}} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme. QED

Remarque 2.11. Soit x un point de X dont la fibre dans X_L est réduite à un point x_L . Si l'on note $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_{x_L}$ les semi-normes correspondantes sur \mathcal{A} et \mathcal{B} . On a pour tout n -uplet (f_1, \dots, f_n) d'éléments de \mathcal{A} , l'égalité

$$\left\| \sum_{i \in \mathcal{B}} f_i \cdot l_i \right\|_{x_L} = \max \|f_i\|_x |l_i|.$$

Donc si l'on note $\tilde{\mathcal{A}}^x, \tilde{\mathcal{B}}^{x_L}$ les réductions pour ces semi-normes. Le morphisme canonique

$$\tilde{\mathcal{A}}^x \otimes_{\tilde{k}} \tilde{L} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}^{x_L}$$

est un isomorphisme.

2.2 Résultat

Théorème 2.12. Soit k un corps ultramétrique complet, soit X un espace k -analytique et soit L une extension galoisienne finie et modérément ramifiée de k . Alors X_L est un L -polydisque fermé de polyrayon $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ sur lequel l'action de Galois est résiduellement affine si et seulement si X est un k -polydisque fermé de polyrayon $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$, avec pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$|L^\times| r_i = |L^\times| s_i.$$

Démonstration. Si X est un k -polydisque fermé le résultat est immédiat.

Réciproquement. On désigne par T_1, \dots, T_n un système de fonctions coordonnées sur X_L . Soit \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) l'algèbre des fonctions analytiques sur X (resp. X_L) que nous munissons de la norme spectrale, $\|\cdot\|_\infty$.

Il existe (lemme 2.3) un isomorphisme entre $\tilde{\mathcal{B}}$ et $\tilde{L}[\tau_1, \dots, \tau_n]$ modulo lequel $\tilde{T}_i = \tau_i$ est de degré r_i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Lemme 2.13. Quitte à remplacer $(T)_{i=1, \dots, n}$ par un autre système de coordonnées on peut supposer les τ_i invariants sous l'action de $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$.

Démonstration. Par notre hypothèse sur l'action de Galois, pour tout $g \in \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$:

$$g \cdot (\tau)_{i=1..n} = A_g(\tau_i)_{i=1..n} + B_g$$

avec

$$— A_g = (a_{ij,g})_{i,j=1..n} \in \text{GL}(\tilde{L}, \mathbf{r});$$

$$— B_g = (b_{i,g})_{i=1..n} \in \tilde{L}_{\mathbf{r}}.$$

Considérons d'abord seulement les termes de degré 1. On obtient l'identité :

$$A_{gh} = A_g(g.A_h).$$

D'après notre variante du théorème 90 de Hilbert ([proposition 1.18](#)), il existe $\mathbf{s} = (s_i)_{i=1..n}$ dans \mathbb{R}^n et P dans $\text{GL}(\tilde{L}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ telle que $A_g = (g.P)P^{-1}$ pour tout $g \in \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$.

Pour tout $g \in \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$

$$g \cdot (P^{-1}(\tau_i)_{i=1..n}) = P^{-1}(\tau_i)_{i=1..n} + B'_g,$$

avec $B'_g \in \tilde{L}_{\mathbf{s}}$. Quitte à remplacer $(\tau_i)_{i=1..n}$ par $P^{-1}(\tau_i)_{i=1..n}$ on peut écrire pour tout $g \in \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$:

$$g \cdot (\tau_i)_{i=1..n} = (\tau_i)_{i=1..n} + B_g,$$

avec $B_g \in \tilde{L}_{(s_i)}$. Soit coordonnée par coordonnée :

$$g \cdot \tau_i = \tau_i + b_{i,g},$$

où $b_{i,g} \in \tilde{L}_{s_i}$. Fixons i , soient g et h deux éléments de $\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$; via les égalités

$$(gh) \cdot \tau_i = \tau_i + b_{i,gh}$$

$$g \cdot (h \cdot \tau_i) = g \cdot (\tau_i + b_{i,h}) = \tau_i + b_{i,g} + g \cdot b_{i,h}$$

on obtient l'identité

$$b_{i,gh} = b_{i,g} + g(b_{i,h}).$$

Ainsi, pour tout i , l'application $g \mapsto b_{i,g}$ est un cocycle additif de $H^1(G, \tilde{L}_{s_i})$, et d'après la version graduée additive du théorème 90 de Hilbert ([proposition 1.21](#)), est un cobord, c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{\mu}_i$ dans $\tilde{L}_{|\lambda^{-1}|_R}$ tel que $b_{i,g} = g \cdot \tilde{\mu}_i - \tilde{\mu}_i$ pour tout $g \in \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$.

Donc les τ_i peuvent être supposés invariants sous Galois, quitte à les translater par μ_i . Il suffit alors de remplacer les T_i par les antécédents de ces nouveaux τ_i . QED

Nous avons établi qu'il existe un isomorphisme entre $\tilde{\mathcal{A}} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{L}$, puisque isomorphe à $\tilde{\mathcal{B}}$ ([lemme 2.10](#)), et

$$\tilde{L}[\tau_1, \dots, \tau_n],$$

modulo lequel, pour tout i , $\tilde{T}_i = \tau_i$ est de degré s_i . Comme $\tilde{\mathcal{A}} = (\tilde{\mathcal{A}} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{L})^{\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})}$ on en déduit que $\tilde{\mathcal{A}}$ est isomorphe à $\tilde{k}[\tau_1, \dots, \tau_n]$.

Il existe donc une famille de fonctions analytiques (f_1, \dots, f_n) dans \mathcal{A} ayant pour réductions (τ_1, \dots, τ_n) ; en particulier, les f_i sont de rayon spectral s_i . Soit Y le k -polydisque de polyrayon \mathbf{s} et soit φ le morphisme $X \rightarrow Y$ induit par les f_i ; il résulte de la [proposition 2.4](#) que $\varphi_L : X_L \rightarrow Y_L$ est un isomorphisme.

Comme être un isomorphisme descend par extension quelconque des scalaires [voir [CT](#), Theorem 9.2], φ est un isomorphisme.

De plus X_L est un L -polydisque à la fois de type \mathbf{r} et de type \mathbf{s} , donc, d'après le [corollaire 2.6](#) quitte à réordonner les s_i , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$|L^\times|_{r_i} = |L^\times|_{s_i}.$$

QED

3 Formes de dentelles

On note k un corps ultramétrique complet.

On note T_1, \dots, T_n des coordonnées sur $\mathbb{G}_m^{n,\text{an}}$.

On note $\rho : x \mapsto \eta_{(|T_1(x)|, \dots, |T_n(x)|)}$ la rétraction de $\mathbb{G}_m^{n,\text{an}}$ sur son squelette $S(\mathbb{G}_m^{n,\text{an}})$.

Notation. Soit U une partie de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$, nous noterons

$$\eta_U = \{\eta_{\mathbf{r}} \in \mathbb{G}_m^{n,\text{an}}, \mathbf{r} \in U\};$$

$$\mathbb{D}_U = \rho^{-1}(\eta_U) = \{x \in \mathbb{G}_m^{n,\text{an}}, (|T_1(x)|, \dots, |T_n(x)|) \in U\}.$$

Nous considérons (\mathbb{R}_+^\times) comme un espace vectoriel réel, la loi interne étant donnée par sa structure de groupe abélien et la loi externe par l'exponentiation coordonnée par coordonnée.

Définition 3.1. On note $\text{Aff}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{R}_+^\times)^n)$ l'ensemble des applications affines de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ vers \mathbb{R}_+^\times de la forme

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto r \prod t_i^{a_i}$$

où les a_i appartiennent à \mathbb{Z} et où $r \in \mathbb{R}_+^\times$.

Un \mathbb{Z} -polytope de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ définie par une condition de la forme :

$$\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} \varphi_{i,j} \leq 1$$

où I et J sont des ensembles finis d'indices et où les $\varphi_{i,j}$ appartiennent à $\text{Aff}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{R}_+^\times)^n)$.

Définition 3.2. Soit X un espace topologique séparé et localement compact. Soit Y une partie de X et soit (Y_i) une famille de sous-ensembles de Y . On dit que la famille (Y_i) est un G -recouvrement de Y si tout point y de Y possède un voisinage dans Y de la forme $U_{i \in I} Y_i$ où I est un ensemble fini d'indices et où $y \in \cap_{i \in I} Y_i$.

Définition 3.3. Une partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ est une partie de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ qui admet un G -recouvrement par une famille de \mathbb{Z} -polytopes de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$.

Remarque 3.4. Soit U un \mathbb{Z} -polytope non-vide convexe, c'est-à-dire non vide et défini par une condition de la forme :

$$\bigwedge_{i=1..m} \varphi_i \leq 1$$

où les $\varphi_i : \mathbf{t} \mapsto r_i \mathbf{t}^{\mathbf{a}_i}$ appartiennent à $\text{Aff}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{R}_+^\times)^n)$. Alors \mathbb{D}_U est un domaine k -affinoïde de $\mathbb{G}_m^{n,\text{an}}$. Pour le voir : noter R un réel positif non nul tel que U soit inclus dans le pavé $\subset [R^{-1}; R]^n$ et remarquer que la partie \mathbb{D}_U est isomorphe au spectre analytique de

$$k\{R^{-1}T_1, R^{-1}T_1^{-1}, \dots, R^{-1}T_n, R^{-1}T_n^{-1}, r_1^{-1}S_1, \dots, r_m^{-1}S_m\} / (\mathbf{T}^{\mathbf{a}_i} - S_i)_{i=1..m}.$$

Ainsi quand U est une partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ non vide, \mathbb{D}_U est un domaine k -analytique de $\mathbb{G}_m^{n,\text{an}}$ et donc un espace k -analytique. En effet, on a par construction un G -recouvrement de \mathbb{D}_U par des domaines k -affinoïdes de $\mathbb{G}_m^{n,\text{an}}$ ([Ber93]).

Remarque 3.5. Pour toute partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ on peut décrire le squelette η_U de \mathbb{D}_U comme l'ensemble des points maximaux de \mathbb{D}_U pour la relation : $x \leq y$ si et seulement si $|f(x)| \leq |f(y)|$ pour toute fonction analytique f sur \mathbb{D}_U .

Donc le squelette ne dépend pas du choix de coordonnées et $\sigma(\eta_U) = \eta_U$ pour tout automorphisme σ d'espace analytique de \mathbb{D}_U (σ peut agir non trivialement sur k).

Remarque 3.6. Soit U une partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ connexe, la rétraction ρ de $G_m^{n,\text{an}}$ sur son squelette induit une rétraction canonique de \mathbb{D}_U vers η_U . En fait il existe [Ber99] une rétraction par déformation $\Phi : G_m^{n,\text{an}} \times [0;1] \rightarrow S(G_m^{n,\text{an}})$ qui préserve $|T_i|$ pour tout i et donc rétracte \mathbb{D}_U sur η_U , de la connexité de η_U découle alors celle de \mathbb{D}_U ; la rétraction ρ est simplement $\Phi(\bullet, 1)$.

Si L est une extension complète de k nous utiliserons les notations $\mathbb{D}_{U,L}$ et $\eta_{U,L}$ dans un sens évident. La flèche $\mathbb{D}_{U,L} \rightarrow \mathbb{D}_U$ induit un homéomorphisme $\eta_{U,L} \simeq \eta_U$, et, par les formules, $\mathbb{D}_{U,L} \rightarrow \mathbb{D}_U$ commute aux rétractions canoniques de $\mathbb{D}_{U,L}$ sur $\eta_{U,L}$ et de \mathbb{D}_U sur η_U .

Le point $\eta_{\mathbf{r}, \widehat{k^a}}$ de $G_{\widehat{k^a}}^{n,\text{an}}$ est par définition invariant sous l'action de Galois; il s'ensuit que si L est une extension complète de k admettant un k -plongement isométrique dans $\widehat{k^a}$ (appelé *extension presque algébrique de k* dans [Duc]), l'image réciproque de η_U sur $\mathbb{D}_{U,L}$ est exactement $\eta_{U,L}$.

Définition 3.7. Nous dirons qu'un espace k -analytique X est une *k -dentelle de type U* s'il est isomorphe à \mathbb{D}_U avec U une partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ connexe et non vide.

Nous dirons qu'une famille (f_1, \dots, f_n) de fonctions sur une k -dentelle X est un *système de coordonnées* si les f_i induisent un isomorphisme entre X et \mathbb{D}_U où U est une partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ connexe et non vide.

Un isomorphisme $X \simeq \mathbb{D}_U$ identifie η_U à une partie de X qui ne dépend pas du choix du système de coordonnées; nous l'appellerons le *squelette analytique* de X et nous le noterons $S^{\text{an}}(X)$.

Remarque 3.8. Quand X est un espace k -analytique et L une extension galoisienne de k tels que X_L soit une L -dentelle, l'action de $\text{Gal}(L/k)$ sur X_L fixe le squelette de X_L ; c'est une conséquence de la **remarque 3.5**.

Désormais U désignera toujours une partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux connexe et non vide.

Définition 3.9. Nous noterons \mathcal{A}_U l'algèbre des fonctions analytiques sur \mathbb{D}_U et $\widetilde{\mathcal{A}}_U^{\mathbf{r}}$ sa réduction pour la semi-norme $||\cdot||_{\mathbf{r}}$ évaluation en $\eta_{\mathbf{r}}$ pour tout $\mathbf{r} \in U$.

Quand U est un singleton nous écrirons simplement $\widetilde{\mathcal{A}}_{\{r\}}$ au lieu de $\widetilde{\mathcal{A}}_{\{r\}}^{\mathbf{r}}$.

Remarque 3.10. L'algèbre \mathcal{A}_U est l'ensemble des séries $\sum_{I \in \mathbb{Z}^n} a_I \mathbf{T}^I$ telles que, pour tout $\mathbf{r} \in U$,

$$\lim_{|I| \rightarrow +\infty} |a_I| \mathbf{r}^I = 0.$$

Lemme 3.11. Il existe un isomorphisme de \widetilde{k} -algèbres graduées entre $\widetilde{\mathcal{A}}_U^{\mathbf{r}}$ et l'anneau gradué

$$\widetilde{k}[\tau_{\mathbf{r},1}, \tau_{\mathbf{r},1}^{-1}, \dots, \tau_{\mathbf{r},n}, \tau_{\mathbf{r},n}^{-1}]$$

modulo les identifications de $\widetilde{T}_i^{\mathbf{r}}$ avec $\tau_{\mathbf{r},i}$ (de degré r_i) et de $\widetilde{T}_i^{-1\mathbf{r}}$ avec $\tau_{\mathbf{r},i}^{-1}$ (de degré r_i^{-1}).

Démonstration. Corollaire de [Tem04, Proposition 3.1 (ii)] en remarquant que $||\cdot||_{\mathbf{r}}$ est la norme spectrale de l'algèbre des fonction analytiques du polydisque de polyrayon \mathbf{r} . QED

3.1 Monôme strictement dominant et système de fonctions coordonnées

Définition 3.12. Soit $f = \sum_I a_I \mathbf{T}^I$ une fonction de \mathcal{A}_U . Nous dirons que f a un *monôme strictement dominant de polydegré I* si pour tout $\mathbf{r} \in U$ et tout $J \neq I$,

$$|a_I| \mathbf{r}^I > |a_J| \mathbf{r}^J.$$

Lemme 3.13. Une fonction de \mathcal{A}_U est inversible si et seulement si elle a un monôme strictement dominant.

Démonstration. Si elle en a un elle s'écrit $f = a_I \mathbf{T}^I (1 + u)$ avec $\|u\|_{\mathbf{r}} < 1$ pour tout $\mathbf{r} \in U$ et est donc inversible.

Réciproquement, $\widetilde{f^{\mathbf{r}}}$ est inversible dans $\widetilde{\mathcal{A}_{\{\mathbf{r}\}}}$. Donc s'écrit $\widetilde{a_{I(\mathbf{r})}} \tau_{\mathbf{r}}^{I(\mathbf{r})}$, c'est-à-dire que pour tout $\mathbf{r} \in U$ il existe un unique n -uplet $I(\mathbf{r})$ tel que

$$|a_{I(\mathbf{r})}| \mathbf{r}^{I(\mathbf{r})} = \max |a_I| \mathbf{r}^I.$$

La fonction $\mathbf{r} \mapsto I(\mathbf{r})$ est localement constante et donc constante sur U . QED

Lemme 3.14. *Une famille de fonctions $(f_i)_{i=1..n}$ forme un système de fonctions coordonnées si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction f_i admet un monôme strictement dominant de polydegré I_i et la matrice ayant pour lignes les I_i appartient à $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$.*

Remarque 3.15. Par exemple sur la k -dentelle de type $\{(1, 1)\}$, si l'on pose

$$(f_1, f_2) = (T_1 T_2^{-1}, T_2) \text{ et } (g_1, g_2) = (T_1 T_2, T_2)$$

on obtient deux systèmes de fonctions coordonnées induisant des automorphismes de la bicouronne (l'un étant inverse de l'autre).

Démonstration. On notera \mathbf{I} la matrice ayant pour lignes les I_i .

Implication. Chaque f_i est inversible puisque fonction coordonnée, et admet donc un monôme strictement dominant de polydegré I_i . On vérifie que les polydegrés des monômes strictement dominant des fonctions induisant l'isomorphisme inverse donnent immédiatement l'inverse de \mathbf{I} .

Réciproque. Notons J_i le i -ème vecteur ligne de \mathbf{I}^{-1} . Quitte à remplacer (T_1, \dots, T_n) par $(\mathbf{T}^{J_1}, \dots, \mathbf{T}^{J_n})$ (système de fonctions coordonnées induisant un morphisme d'inverse évident), on peut supposer que f_i a pour monôme strictement dominant $a_i T_i$. Donc, quitte à remplacer à nouveau (T_1, \dots, T_n) par $(a_1^{-1} T_1, \dots, a_n^{-1} T_n)$, on peut supposer que f_i a pour monôme strictement dominant T_i .

On peut écrire $f_i = T_i + f_i^{(1)}$ où $f_i^{(1)} \in \mathcal{A}_U$ et $\|f_i^{(1)}\|_{\mathbf{r}} < r_i$ pour tout $\mathbf{r} \in U$.

Montrons qu'une telle famille induit un automorphisme de \mathbb{D}_U . Il suffit qu'elles induisent un automorphisme de \mathcal{A}_U . Si nous arrivions à construire pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ une fonction g_i de \mathcal{A}_U telle que $g_i(f_i) = T_i$ nous en aurions terminé. Nous allons construire g_1 par approximation successives.

Si $f_1^{(1)} = 0$ la fonction $g_1^{(1)} = T_1$ convient, sinon fixons $\mathbf{r} \in U$, écrivons $f_1^{(1)} = \sum a_{i,I}^{(1)} \mathbf{T}^I$ et notons $\delta = \max_i (\frac{\|f_i^{(1)}\|_{\mathbf{r}}}{r_i})$ (par construction $\delta < 1$). Remarquons que pour tout $I \in \mathbb{Z}^n$

$$\|\mathbf{T}^I - \mathbf{f}^I\|_{\mathbf{r}} = \|\mathbf{T}^I - (\mathbf{T} - \mathbf{f}^{(1)})^I\|_{\mathbf{r}} \leq \delta \mathbf{r}^I.$$

Ainsi, si l'on note

$$\mathcal{E} = \{I \in \mathbb{Z}^n, \delta \|f_1^{(1)}\|_{\mathbf{r}} < |a_{i,I}| \mathbf{r}^I \leq \|f_1^{(1)}\|_{\mathbf{r}}\}$$

l'ensemble fini (puisque $f_1^{(1)}$ est un élément non nul de \mathcal{A}_U) des multi-indices des monômes de norme strictement supérieure à $\delta \|f_1^{(1)}\|_{\mathbf{r}}$, il suit que

$$\|f_1^{(1)} - \sum_{I \in \mathcal{E}} a_I \mathbf{f}^I\|_{\mathbf{r}} \leq \delta \|f_1^{(1)}\|_{\mathbf{r}}.$$

Posant $f_1^{(2)} = f_1' - \sum_{I \in \mathcal{E}} a_{1,I} \mathbf{f}^I$ et $g_1^{(2)} = g_1^{(1)} - \sum a_{1,I} \mathbf{T}^I$,

- $f_1^{(2)}$ appartient à \mathcal{A}_U et $\|f_1^{(2)}\|_{\mathbf{r}} \leq \delta \|f_1^{(1)}\|_{\mathbf{r}}$
- et $g_1^{(2)}(f_1, \dots, f_n) = T_1 + f_1^{(2)}$.

En itérant on obtient une suite $(f_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de \mathcal{A}_U qui tend vers 0 et une suite $(g_1^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions de \mathcal{A}_U dont on note g_1 la limite. Vérifions que $g_1 \in \mathcal{A}_U$. Notons b_I le coefficient de multi-indice I de g_1 et $a_{1,I}^{(n)}$ celui de $f_1^{(n)}$. Soit $\varepsilon > 0$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|f_1^{(i)}\|_{\mathbf{r}} = 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}, \forall i \geq m, \forall I \in \mathbb{Z}^n, |a_{1,I}^{(i)}| \mathbf{r}^I < \varepsilon,$$

et

$$\forall i \in \mathbb{N}, f_1^{(i)} \in \mathcal{A}_U \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_i \in \mathbb{N}, \forall |I| \geq N_i, \forall i \in \mathbb{N}, |a_{1,I}^{(i)}| \mathbf{r}^I < \varepsilon.$$

Donc $|b_I| \mathbf{r}^I = \max_i |a_{1,I}^{(i)}| < \varepsilon$ pour tout $|I| \geq \max_{i=1..m}(N_i)$, c'est-à-dire que $g_1 \in \mathcal{A}_U$. QED

Définition 3.16. Il suit de la discussion ci-dessus que le groupe

$$\mathcal{L}(\mathbb{D}_U) := \mathcal{A}_U^\times / k^\times (1 + \mathcal{A}_U^{\circ\circ})$$

est libre de rang n , et une famille de fonctions (f_1, \dots, f_n) est un système de fonctions coordonnées si et seulement si elles sont inversibles et s'envoient sur une base de $\mathcal{L}(\mathbb{D}_U)$ (comme \mathbb{Z} -module).

Nous appellerons *réseau* de \mathbb{D}_U le groupe $\mathcal{L}(\mathbb{D}_U)$.

Nous dirons qu'un automorphisme de \mathbb{D}_U agit *trivialement sur le réseau* s'il agit trivialement sur $\mathcal{L}(\mathbb{D}_U)$.

Remarque 3.17. Quand U une partie \mathbb{Z} -linéaire par morceaux de $(\mathbb{R}_+^\times)^n$ connexe et non vide, et L une extension galoisienne finie complète de k , l'action de Galois de $\text{Gal}(L/k)$ sur $\mathbb{D}_{U,L}$, induite par son action naturelle sur $G_L^{n,\text{an}}$, est triviale sur le réseau : il suffit de prendre des coordonnées de $G_k^{n,\text{an}}$.

Ainsi, si un espace k -analytique X est une k -dentelle, l'action de $\text{Gal}(L/k)$ est triviale sur le réseau de X_L .

Quand U est d'intérieur non vide un automorphisme de \mathbb{D}_U agit trivialement sur le réseau si et seulement s'il agit trivialement sur le squelette analytique η_U de \mathbb{D}_U .

3.2 Résultat

Notation. Soit $U \subset (\mathbb{R}_+^\times)^n$ et $\mathbf{s} \in (\mathbb{R}_+^\times)^n$ on note $\mathbf{s}.U$ l'image de U via la translation multiplicative $\mathbf{r} \mapsto (s_1 r_1, \dots, s_n r_n)$.

Théorème 3.18. Soit k un corps ultramétrique complet, L une extension galoisienne finie modérément ramifiée de k et X un espace k -analytique. Alors X_L est une L -dentelle de type $U \subset (\mathbb{R}_+^\times)^n$ telle que l'action de $\text{Gal}(L/k)$ est triviale sur le réseau de X_L si et seulement si X est une k -dentelle de type $\mathbf{r}.U$ avec $\mathbf{r} \in |L^\times|^n$.

Démonstration. Si X est une k -dentelle de type $\mathbf{r}.U$, X_L est une L -dentelle de type $\mathbf{r}.U$, donc de type U – puisque soit $(\lambda_i)_{i=1..n}$ une famille de L^\times avec $|\lambda_i| = r_i$, l'application $T_i \mapsto \lambda_i T_i$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{D}_{U,L}$ et $\mathbb{D}_{\mathbf{r}.U,L}$ – et l'action de $\text{Gal}(L/k)$ sur X_L est triviale sur le réseau ([cf. remarque 3.17](#)).

Réciproquement. On désigne par (T_1, \dots, T_n) un système de fonctions coordonnées sur X_L induisant un isomorphisme vers $\mathbb{D}_{U,L}$. Soit \mathcal{A} (resp. \mathcal{B}) l'algèbre des fonctions analytiques sur X (resp. X_L).

L'isomorphisme $X_L \rightarrow \mathbb{D}_{U,L}$ induit un homéomorphisme stable sous Galois entre $S^{\text{an}}(X_L)$ le squelette analytique de X_L et $\eta_{U,L}$. Le passage au quotient sous Galois induit dès lors un homéomorphisme entre une partie de X et $\eta_{U,L}$.

Pour tout $\mathbf{r} \in U$, nous notons naturellement $\|\cdot\|_{\mathbf{r}}$ les semi-normes sur \mathcal{A} et \mathcal{B} correspondant à l'évaluation en $\eta_{\mathbf{r},L}$ modulo les deux homéomorphismes mentionnés ci-dessus. Nous notons $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}}$ et $\tilde{\mathcal{B}}^{\mathbf{r}}$ les réductions graduées de \mathcal{A} et \mathcal{B} pour les semi-normes $\|\cdot\|_{\mathbf{r}}$.

Il existe ([lemme 3.11](#)) un isomorphisme entre $\tilde{\mathcal{B}}^{\mathbf{r}}$ et

$$\tilde{L}[\tau_{\mathbf{r},1}, \tau_{\mathbf{r},1}^{-1}, \dots, \tau_{\mathbf{r},n}, \tau_{\mathbf{r},n}^{-1}]$$

modulo les identifications de $\tilde{T}_i^{\mathbf{r}}$ avec $\tau_{\mathbf{r},i}$ (de degré r_i) et de $\widetilde{T_i^{-1}}^{\mathbf{r}}$ avec $\tau_{\mathbf{r},i}^{-1}$ (de degré r_i^{-1}).

Par hypothèse l'action de Galois préserve le réseau de la couronne, autrement dit, pour tout $g \in \text{Gal}(L/k)$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$ la fonction $g.T_i$ a pour coefficient dominant αT_i avec $|\alpha| = 1$ (puisque les $g.T_i$ induisent un automorphisme). Ainsi, pour tout $g \in \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$, tout $\mathbf{r} \in U$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$

$$g \cdot \tau_{\mathbf{r},i} = a_{i,g} \tau_{\mathbf{r},i}$$

où $a_{i,g} \in \tilde{L}_1^{\times}$ (car, notant m l'ordre de g et α le degré de $a_{i,g}$ l'identité $g^m \cdot (\tau_{\mathbf{r},i} = \tau_{\mathbf{r},i})$ implique que $\alpha^m = 1$ d'où $\alpha = 1$). Les $a_{i,g}$ ne dépendent pas de \mathbf{r} puisque obtenus par réduction du coefficient du même monôme strictement dominant.

La situation est exactement analogue au cas des polydisques. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ l'application $g \mapsto a_{i,g}$ est un élément de $Z^1(\text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k}), \tilde{L}_1^{\times})$ donc, d'après la version graduée du théorème 90 de Hilbert ([corollaire 1.20](#)), il existe $\lambda_i \in L^{\times}$ (il n'y a pas de raison que $|\lambda_i| = 1$) tel que $a_{i,g} = \tilde{\lambda}_i^{-1}(g \cdot \tilde{\lambda}_i)$ pour tout $g \in \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Notons $\Lambda = (|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)$. Les applications $T_i \mapsto \lambda_i T_i$ induisent un isomorphisme entre \mathbb{D}_U et $\mathbb{D}_{\Lambda.U}$ (d'inverse évidemment induit par $T_i \mapsto \lambda_i^{-1} T_i$) donc, quitte à remplacer U par $\Lambda.U$, on peut supposer, pour tout $g \in \text{Gal}(\tilde{L}/\tilde{k})$, tout $\mathbf{r} \in U$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$ que

$$g \cdot \tau_{\mathbf{r},i} = \tau_{\mathbf{r},i}.$$

Choisissons un d -uplet (l_1, \dots, l_d) d'éléments de L^{\times} tel que $(\tilde{l}_1, \dots, \tilde{l}_d)$ soit une base de \tilde{L} sur \tilde{k} , comme il ne nous coute rien de prendre $l_1 = 1$ nous le ferons. Les flèches naturelles

$$\mathcal{A} \otimes_k L = \bigoplus \mathcal{A}.l_i \rightarrow \mathcal{B}$$

et, pour tout $\mathbf{r} \in U$,

$$\tilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{L} = \bigoplus \tilde{\mathcal{A}}^{|l_i|^{-1}\mathbf{r}}. \tilde{l}_i \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}^{\mathbf{r}}$$

sont des isomorphismes. Le premier vient du [lemme 2.9](#). Le deuxième du [lemme 2.10](#) et de la remarque qui le suit.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on peut donc écrire $T_i = \sum_{j=1 \dots d} f_{i,j} l_j$ avec $f_{i,j} \in \mathcal{A}$ pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$. En passant à la réduction on obtient, pour tout $\mathbf{r} \in U$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\tau_{\mathbf{r},i} = \tilde{f}_{i,1}^{\mathbf{r}} + \sum_{j \neq 1} (\tilde{f}_{i,j}^{\mathbf{r}})_{|l_j|^{-1}\mathbf{r}} \cdot \tilde{l}_j$$

où $\tau_{\mathbf{r},i}$, $\tilde{f}_{i,1}^{\mathbf{r}}$ et tous les $(\tilde{f}_{i,j}^{\mathbf{r}})_{|l_j|^{-1}\mathbf{r}}$ (c'est-à-dire la composante de degré $|l_j|^{-1}r_i$ de la réduction de $f_{i,j}$ dans $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}}$) sont invariants sous Galois et $(\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \dots, \tilde{l}_d)$ forme une base de $\tilde{\mathcal{B}}^{\mathbf{r}}$ sur $\tilde{\mathcal{A}}^{\mathbf{r}}$. On a égalité des termes Galois invariants, donc $\tau_{\mathbf{r},i} = \tilde{f}_{i,1}^{\mathbf{r}}$.

Ainsi il existe une famille (f_1, \dots, f_n) de fonctions de \mathcal{A} (on a écrit f_i pour $f_{i,1}$) telles que, après extension des scalaires, on ait, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et tout $\mathbf{r} \in U$,

$$\tilde{f}_i^{\mathbf{r}} = \tau_{\mathbf{r},i}.$$

Ou encore, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, dans \mathcal{B} , f_i a pour monôme strictement dominant $a_i T_i$ avec $|a_i| = 1$ et $\tilde{a}_i = \tilde{1}$. En particulier, d'après le [lemme 3.14](#), les (f_i) forment un système de fonctions coordonnées sur X_L (qui induit un automorphisme).

Il existe donc une famille de fonctions analytiques (f_1, \dots, f_n) dans \mathcal{A} qui induisent un morphisme $\varphi : X \rightarrow \mathbb{D}_U$ tel que $\varphi_L : X_L \rightarrow \mathbb{D}_{U,L}$ soit un isomorphisme.

Comme être un isomorphisme descend par extension quelconque des scalaires [voir [CT](#), Theorem 9.2], φ est un isomorphisme. QED

3.3 Exemple de forme non triviale de couronne

Il était nécessaire que $\eta_{U,L}$ soit invariant sous l'action de Galois ; donnons une forme modérément ramifiée de couronne qui n'est pas une couronne quand ce n'est pas le cas. Prenons comme corps de base $k = \mathbb{Q}_3$, comme extension modérément ramifiée $L = \mathbb{Q}_3[i]$ et intéressons-nous à la partie de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}_3}^{1,\text{an}}$ définie par :

$$\{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_3}^{1,\text{an}}, \frac{1}{4} \leq |(T^2 + 1)(x)|\}$$

que l'on note X (voir [Figure 1](#), le segment $\eta_{[0,\infty]}$ donné comme repère ne joue pas de rôle particulier). L'espace \mathbb{Q}_3 -analytique X n'est pas une \mathbb{Q}_3 -couronne (la partie fermée ainsi définie aurait deux bouts de type 2 ou 3 et non un) et pourtant, après extension des scalaires, on peut écrire

$$X_{\mathbb{Q}_3[i]} = \{x \in \mathbb{P}_{\mathbb{Q}_3[i]}^{1,\text{an}}, \frac{1}{2} \leq \left| \frac{T+i}{T-i} (x) \right| \leq 2\}$$

et remarquer que l'on obtient une $X_{\mathbb{Q}_3[i]}$ -couronne avec $f = \frac{T+i}{T-i}$ comme fonction coordonnée. Notant σ la conjugaison complexe, $\sigma(f) = -f$ et l'action de Galois sur le réseau de $X_{\mathbb{Q}_3[i]}$ n'est pas triviale.

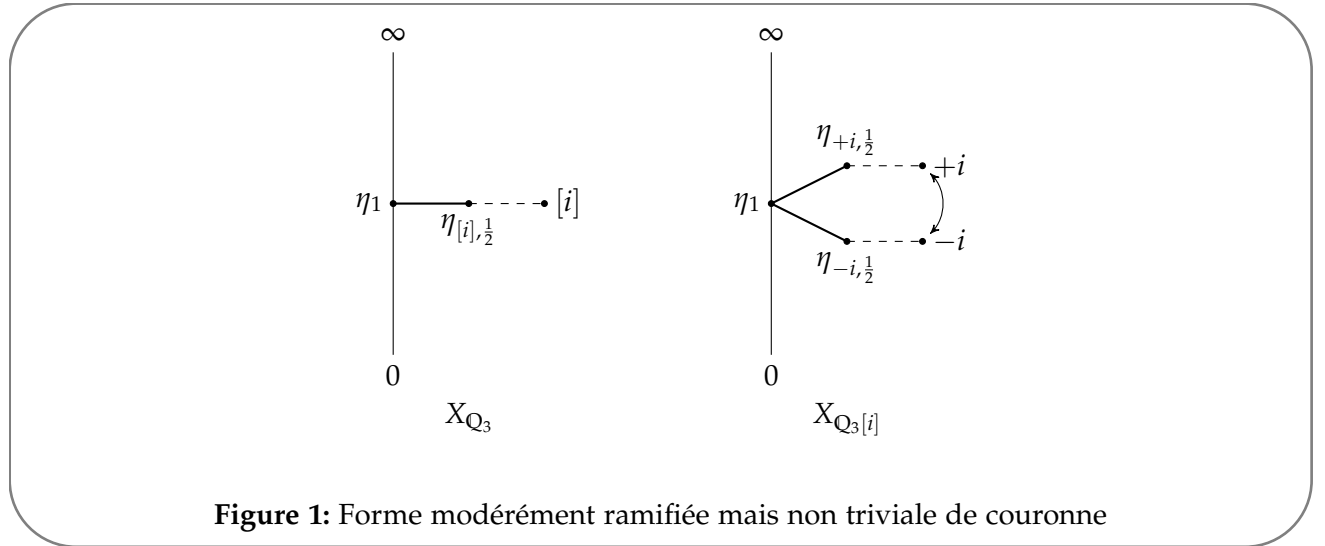


Figure 1: Forme modérément ramifiée mais non triviale de couronne

Remerciements

Je tiens à faire part de toute ma gratitude à mon directeur Antoine Ducros, pour son soutien indéfectible et les innombrables discussions que nous avons eu au cours de l'élaboration de cet article. Je suis aussi très reconnaissant envers Lorenzo Fantini et Daniele Turchetti pour m'avoir toujours tenu au courant de leurs résultats sur les couronnes [[FT17](#)] et nos échanges subséquents.

Références

- [Ber04] Vladimir G BERKOVICH. « Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible. II ». In : *Geometric aspects of Dwork theory* 1 (2004), p. 293–370.
- [Ber10] Grégory BERHUY. *An introduction to Galois cohomology and its applications*. LMS Lecture Notes Series. Cambridge University Press, 2010, p. 318. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00585264>.
- [Ber90] Vladimir G BERKOVICH. *Spectral Theory and Analytic Geometry Over Non-Archimedean Fields*. American Mathematical Soc., 1990.
- [Ber93] Vladimir G BERKOVICH. « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces ». In : *Publications Mathématiques de l’IHÉS* 78.1 (1993), p. 5–161.
- [Ber99] Vladimir G BERKOVICH. « Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible ». In : *Inventiones mathematicae* 137.1 (1999), p. 1–84.
- [CT] Brian CONRAD et Michael TEMKIN. « Descent for non-archimedean analytic spaces ». URL : <http://math.stanford.edu/~conrad/papers/descentnew.pdf>.
- [Duc] Antoine DUCROS. *La structure des courbes analytiques*. URL : <http://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/livre.html>.
- [Duc12a] Antoine DUCROS. « Espaces de Berkovich, polytopes, squelettes et théorie des modèles ». In : *Confluentes Mathematici* 4.04 (2012), p. 1250007.
- [Duc12b] Antoine DUCROS. « Toute forme modérément ramifiée d’un polydisque ouvert est triviale ». In : *Mathematische Zeitschrift* 273.1 (31 mar. 2012), p. 331–353.
- [FT17] L. FANTINI et D. TURCHETTI. « Galois descent of semi-affinoid spaces ». In : *ArXiv e-prints* (mar. 2017). arXiv : [1703.03698](https://arxiv.org/abs/1703.03698) [math.AG].
- [Kam75] Tatsuji KAMBAYASHI. « On the absence of nontrivial separable forms of the affine plane ». In : *Journal of Algebra* 35.1-3 (1975), p. 449–456.
- [Kra95] Hanspeter KRAFT. « Challenging problems on affine n -space ». eng. In : *Séminaire Bourbaki* 37 (1994-1995), p. 295–317. URL : <http://eudml.org/doc/110203>.
- [Sch15] Tobias SCHMIDT. « Forms of an affinoid disc and ramification ». In : *Annales de l’Institut Fourier* 65.3 (2015), p. 1301–1347.
- [Tem04] Michael TEMKIN. « On local properties of non-Archimedean analytic spaces II ». In : *Israel Journal of Mathematics* 140.1 (2004), p. 1–27.